

REVISTA “UNIVERSUM”

Universidad de Talca

**PREDICCIÓN DE CAUDALES RECESIVOS MEDIANTE MODELOS
MATEMÁTICOS**

Manuel Roberto Pizarro Tapia (*)

José Luis Saavedra Lucero ()**

En el presente documento se muestra primeramente una caracterización teórica de un Hidrograma de crecidas, donde es posible diferenciar claramente sus tramos correspondientes a curva de crecida, curva de bajada y curva de agotamiento.

A partir de esta última y bajo ciertos conceptos teóricos como la variación de caudal respecto al tiempo, es posible estudiar y modelar matemáticamente esta curva de agotamiento.

Se consideran dos métodos: el primero, Método matemático, cuyo fundamento principal es asumir que la variación del caudal en el tiempo es proporcional al mismo caudal, y Método hidráulico en que el autor Cirugeda cita a Serra, y donde se asume que el vaciado de un acuífero se puede asimilar a un amplio recipiente lleno de material poroso, donde vierte por un orificio un caudal Q con una carga variable respecto al tiempo.

Para ejemplificar ambos Modelos, se emplearon registros fluviométricos pertenecientes a la Dirección General de Aguas, VII Región Chile, en la estación Las Rastras, Río Lircay. A partir de la Curva de gastos de este río se logra modelar el Hidrograma de crecidas y, considerando la curva de agotamiento de éste se llega a un modelo matemático, para dos eventos distintos. Para analizar la confiabilidad de los modelos, se emplearon el Coeficiente de determinación y la Desviación media cuadrática, obteniéndose para ambos parámetros valores de alta confiabilidad de almacenamiento de la cuenca.

Finalmente se entregan conclusiones y recomendaciones para el uso y aplicación del modelo y sus eventuales falencias.

(*) Ingeniero Forestal, profesor de la Universidad de Talca.

() Estudiante de Ing. Forestal, Universidad de Talca.**

1.- INTRODUCCIÓN

El análisis de hidrogramas de escorrentía, que permite definir el comportamiento de caudales en función del tiempo en alguna sección de control, es un elemento central para inferir las características hidrológicas, geológicas, edafológicas, morfológicas y vegetacionales de la cuenca en términos generales. Así por ejemplo, cuencas desprovistas de vegetación, poseerán en términos globales tiempos de concentración menores que alguna unidad hidrográfica con una adecuada cobertura vegetal.

En este contexto, un hidrograma es un elemento primordial de análisis, para definir comportamientos hidrológicos, y en el cual se reflejan las aguas provenientes de dos fuentes centrales, a saber:

- a) Aguas que discurren por la superficie del terreno y los cursos de agua (escorrentía superficial).
- b) Aguas que se infiltran en el terreno, llegan a la zona de saturación del suelo, y después de cierto tiempo se unen a los cauces superficiales (escorrentía subterránea).

El presente documento, pretende entregar algunos lineamientos técnicos, que permitan estudiar a partir de hidrogramas en secciones controladas, el comportamiento de la curva de agotamiento, es decir, aquella parte del hidrograma que es función exclusiva de las aguas subterráneas, con el fin de modelar su accionar en virtud de fórmulas matemáticas.

2.- CARACTERIZACIÓN DE UN HIDROGRAMA

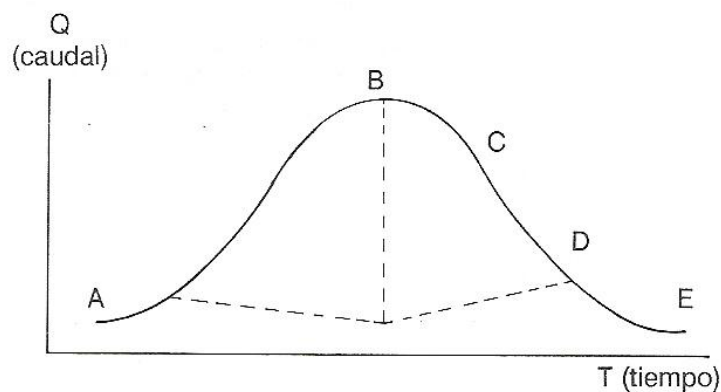


Fig. 1: Hidrograma de Crecida

Como se ha señalado, en el hidrograma se reflejan las aguas provenientes de la escorrentía superficial y subterránea. Así en la figura 1 que representa un hidrograma de crecidas, se aprecian los siguientes componentes:

a) **Curva de crecida:** Corresponde a la parte del hidrograma comprendida entre los puntos A y S, entre los cuales se inicia la crecida, alcanzándose el caudal punta.

b) **Curva de bajada:** Corresponde al tramo comprendido entre los puntos S y D y en donde D, representa el fin de la afluencia de aguas superficiales

c) **Curva recesiva o de agotamiento:** Comprende los puntos D y E, en donde las aguas proceden teóricamente, de alimentación subterránea en forma exclusiva, generando la curva de agotamiento o curva de caudales recesivos.

Ahora bien; entre los puntos A y D se produce una mezcla de aportaciones superficiales y subterráneas, y en donde es necesario separar ambos aportes. La forma más utilizada en Chile define que a partir del punto A, se sigue imaginariamente la tendencia que traía el hidrograma antes de la crecida, hasta la proyección del caudal punta, y desde ahí el caudal subterráneo crece hasta interceptar el segundo quiebre de la curva de bajada, como se señala en la figura 1. Así, toda el área que está bajo la línea punteada, entre los puntos A y D, representa el volumen de aporte subterráneo, en tanto que el área que se ubica por sobre la línea punteada, define el hidrograma superficial. Por ende a partir del punto D, se está en presencia de caudales provenientes exclusivamente de aportes subterráneos, y ese tramo, es el que interesa a los objetivos de este documento.

En el contexto descrito, surge un elemento central, el cual es cómo determinar los quiebres de la curva de bajada del hidrograma, con el fin de definir el punto D a partir del cual se generan caudales recesivos. Para ello se utiliza un gráfico **lg Q v/s tiempo (t)**, como se muestra en la fig. 2.

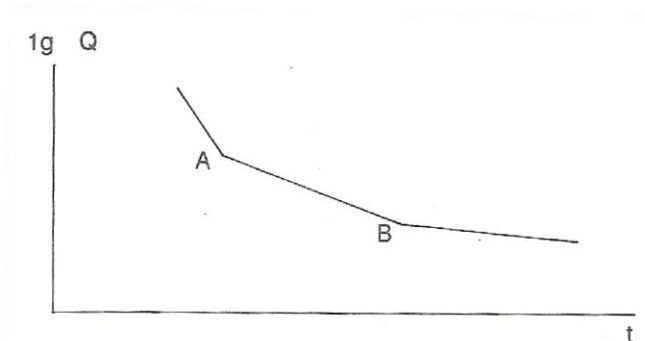


Fig. 2: Determinación de los quiebres en la curva de bajada

Al someter la información de la curva de bajada a un gráfico **lg Q v/s t**, los datos adquieren una distribución gráfica lineal, con lo cual es posible determinar el segundo quiebre y sus coordenadas. Cabe señalar que en términos prácticos, lo anterior no se cumple rigurosamente, ya que se debe trabajar con una nube de puntos.

3.- DETERMINACIÓN MATEMÁTICA DE LA CURVA DE AGOTAMIENTO

La curva de agotamiento posee la característica de que la variación del caudal en función del tiempo, posee valor negativo, es decir, dQ/dt es menor que 0. Asimismo sus coordenadas de partida, pueden definirse como Q_0 para $t = 0 = t_0$.

En este marco, se definirá un modelo matemático por dos procedimientos, a saber, el que se propone en este documento, y aquel que propone Cirugeda (1), determinándose que ambos métodos obtienen una expresión final equivalente. Asimismo es dable señalar que el método que aquí se propone, es de resolución matemática y comprensión conceptual, adecuado a los conocimientos de cualquier profesional involucrado en el tema, en tanto que el que propone Cirugeda, involucra una mayor comprensión hidráulica del fenómeno a modelar, lo cual posee ventajas y desventajas. Para diferenciarlos se denominará a los métodos que aquí se describen, método matemático y método hidráulico.

3.1 Método matemático

Se sabe que $dQ/dt < 0$, donde:

$Q =$ caudal

$t =$ tiempo.

Si se asume que la variación del caudal en el tiempo, es proporcional al mismo caudal, queda lo siguiente:

$$dQ/dt = -\alpha Q \quad (1)$$

Donde $\alpha =$ constante de proporcionalidad.

Operando queda;

$$dQ/Q = -\alpha dt \quad (2)$$

Se sabe además que cuando $Q = Q_0$, se define que $t = 0 = t_0$

Integrando (2) entre los límites t y t_0 , se define:

$$\ln Q \Big|_{Q_0}^Q = -\alpha t \Big|_{t_0}^t \quad (3)$$

lo cual queda como sigue,

$$\ln Q - \ln Q_0 = -\alpha(t - t_0) \quad (4)$$

Por ende;

$$Q = Q_0 e^{-\alpha(t - t_0)} \quad (5)$$

Donde α es una constante de la curva, que se define como coeficiente de agotamiento.

3.2 Método hidráulico

El autor Cirugeda, cita a Serra, según el cual, "el vaciado de un acuífero se puede asimilar a un amplio recipiente lleno de material poroso, que vierte por un orificio un caudal Q con una carga hidráulica variable h , donde h representa la altura de una columna de agua para cada instante de tiempo t , correspondiendo h_0 al instante inicial t_0 , con un caudal Q_0 ". En un instante de tiempo dt , se desagua en volumen dV , es decir:

$$dV = -Qdt \quad (1)$$

Por otra parte, la pérdida de carga dh que se produce es:

$$Qdt = -Sdh \quad (2)$$

Donde S es la superficie del recipiente considerado.

Según Cirugeda, admitiendo que se cumple la ley de Poiseuille, en que el caudal es proporcional a la carga variable, se define que;

$$Q = Ch \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2), se tiene;

$$Chdt = -Sdh \quad (4)$$

Operando, queda;

$$-(C/S) dt = dh/h \quad (5)$$

Integrando (5) entre los límites t y t_0 , resulta;

$$-(C/S) \int_{t_0}^t dt = \int_{h_0}^h \frac{dh}{h}$$

Pero de (3), se obtiene que $h = Q/C$, luego;

$$-(C/S) (t - t_0) = \ln(Q/C) - \ln(Q_0/C)$$

con lo cual,

$$(C/S) (t - t_0)$$

$$Q/Q_0 = e$$

Se determina que $C/S = \alpha$, definido este parámetro como el coeficiente de agotamiento de la cuenca, y se llega a la expresión siguiente;

$$- \alpha(t - t_0)$$

$$Q = Q_0 e$$

análoga al anterior método.

Cabe señalar que el modelo planteado, permite realizar extrapolaciones temporales más allá de las que se presentan en los ejemplos prácticos del punto 4, ya que su consistencia ha sido comprobada en términos óptimos. Lo anterior deja de ser válido si se registra en la cuenca un nuevo proceso precipitación - escorrentía, dado que ello define el término de la curva de caudales recesivos para el período considerado.

3.3 Capacidad de almacenamiento de la cuenca

Una vez determinada la expresión de la curva de agotamiento, es posible definir a groso modo, la capacidad de almacenamiento de agua de la cuenca receptora, integrando la curva de agotamiento a partir del instante t_0 , hasta $t = \infty$.

Así,

$$V = \int_{t_0}^{\infty} Q(t) dt$$

Donde:

V = Volumen en metros cúbicos.

O = Caudal en metros cúbicos/segundo.

t = tiempo.

Para la curva teórica ya definida, se tiene:

$$V = \int_{t_0}^{\infty} Q_{oe}^{-\alpha(t-t_0)} dt = -Q_{oe}^{-\alpha(t-t_0)} / \alpha \Big|_{t_0}^{\infty}$$

Así, $V = Q_0/\alpha$

Estimación que es por defecto, al no considerar pérdidas por evaporación.

3.4 Consideraciones técnicas sobre el método

El modelo teórico que se plantea, más que una fórmula dada como expresión de una ley rigurosa, responde a una expresión matemática que debe ajustarse a datos empíricos. Así, el modelo debe ser ajustado a un número importante de crecidas, con el fin de conocer su comportamiento frente a datos reales. Para ello, se sugiere utilizar algunas medidas de bondad de ajuste, como son las que siguen:

3.4.1 Coeficiente de determinación (R²):

Determina qué proporción de la variación total del hidrograma observado, es explicada por el hidrograma modelado:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Donde:

y_i = Ordenada del hidrograma observado.

\bar{y} = Promedio para las ordenadas del hidrograma observado.

\hat{y}_i = Ordenada del hidrograma modelado.

3.4.2 Desviación media cuadrática (DMC):

Representa la desviación promedio de cada valor modelado, con respecto al valor observado:

$$DMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$$

Donde:

n = Número de pares observados.

4.- EJEMPLO PRÁCTICO DEL MODELO MATEMÁTICO

Los datos que se emplearán, pertenecen a registros de la Dirección General de Aguas VII, Región y específicamente se cuenta con antecedentes fluviométricos de la estación Las Rastras, en el río Lircay. Se presenta la curva de Gasto que define el caudal (Q) en función de la altura (H), con la cual se modela el comportamiento de dos crecidas ocurridas en julio y agosto de 1990.

Cuadro 1: curva de Gastos del río Lircay en las Rastras

H(m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.9	1.00	1.15	1.30	1.45	1.60	1.75	1.90	2.05	2.20	2.35
5.0	2.50	2.90	3.30	3.70	4.10	4.50	4.90	5.30	5.70	6.10
5.1	6.50	6.95	7.40	7.85	8.30	8.75	9.20	9.65	10.10	10.55
5.2	11.00	11.55	12.10	12.65	13.20	13.75	14.30	14.85	15.40	15.95
5.3	16.50									

Gastos métricos (cúbicos/segundos)

Donde:

H = altura en metros.

4.1 Modelación de la Crecida 1: (25 - 26 de Julio de 1990)

A partir del gráfico 1 gQ v/s t, y utilizando los datos de la figura 3, se logra ubicar el segundo punto de inflexión, el que se encuentra a las 14 horas del 26 de Julio que corresponde a $Q_0 = 5.7$ (m³/s.), como se muestra en la figura 4, donde la hora 14 representa el tiempo de partida de la curva recesiva.

Luego;

$$- \alpha (t - t_0)$$

$$Q = Q_0 e$$

$$Q_0 = 5.7 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

$$t_0 = 14 \text{ hrs.}; \text{ Julio } 26$$

$$- \alpha (t - t_0)$$

$$Q = 5.7e$$

Tomando cualquier otro valor de t , en este caso $t = 24$ hrs. para el 26 de Julio, que corresponde en la figura 4, a la ordenada 48 hrs, se obtiene un nuevo valor de $Q = 4.9$ m³/s. que es menos a Q_0 .

Luego, aplicando esto a la ecuación y despejando α , se obtiene;

$$\alpha = 0.015$$

Finalmente el modelo matemático queda de la forma:

$$Q = 5.7 e^{-0,015 (t - 14)}$$

Asimismo y conforme se señala en 3.3, la capacidad de almacenamiento de la cuenca, estimada por defecto, es la siguiente:

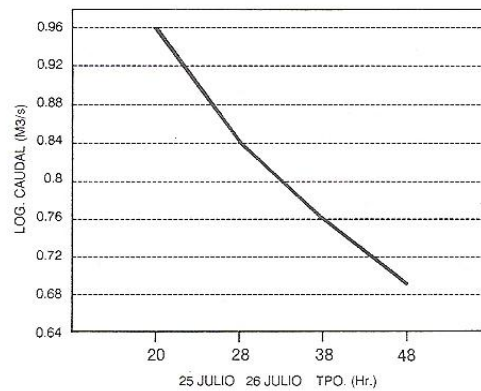
$$C = Q_0 / \alpha = 380 \text{ m}^3$$

Donde:

C = Capacidad de almacenamiento de la cuenca en m³, para la crecida correspondiente.

Fig. 4: CAUDAL RÍO LIRCAY EN LAS RASTRAS

CRECIDA 25.26 DE JULIO 1990



4.2 Modelación de la Crecida 2 (6 - 7 - 8 de Agosto de 1990)

A partir del gráfico 1 gO v/ t , y utilizando los datos de la figura 5, se logra ubicar el segundo punto de inflexión, el que se encuentra a las 06 horas del 08 de Agosto que

corresponde a $Q_0 = 8.8$ (m³/seg.), como se muestra en la figura 6, donde la hora 06 representa el tiempo de partida de la curva recesiva.

Luego;

$$- \alpha (t - t_0)$$

$$Q = Q_0 e$$

$$Q_0 = 8.8 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

$$t_0 = 06 \text{ hrs; Agosto } 08$$

$$- \alpha (t - t_0)$$

$$Q = 8.8 e$$

Tomando cualquier otro valor de t , en este caso $t = 12$ hrs para el 08 Agosto, que corresponde en la figura 6, a la ordenada 48 hrs., se obtiene un nuevo valor de $Q = 8.3$ m³/s. que es menor a Q_0 .

Luego aplicando esto a la ecuación y despejando α , se obtiene;

$$\alpha = 0,00975$$

Finalmente el modelo matemático queda de la forma

$$Q = 8.8 e^{-0,00975 (t-06)}$$

Asimismo y conforme se señala en 3.3 la capacidad de almacenamiento de la cuenca, estimado por defecto, es la siguiente:

$$C = Q_0/\alpha = 903 \text{ m}^3$$

Donde

C = Capacidad de almacenamiento de la cuenca en m³, para la crecida correspondiente.

Fig. 5: CAUDAL RÍO LIRCAY EN LAS-RASTRAS

CRECIDA 6 - 7 - 8 DE AGOSTO DE 1990

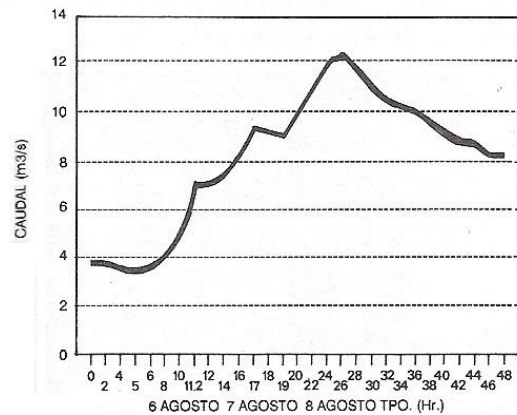
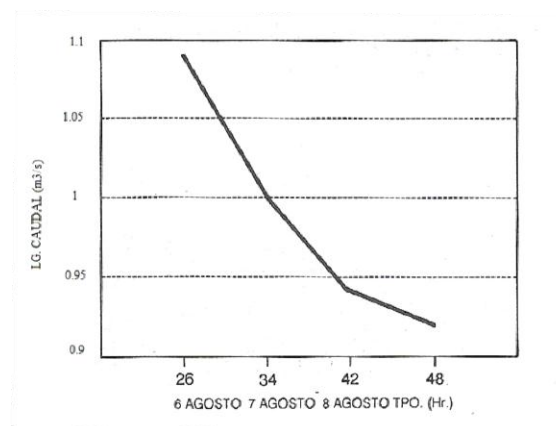


Fig. 6: CAUDAL RÍO LIRCAY EN LAS-RASTRAS

CRECIDA 6 - 7 - 8 DE AGOSTO DE 1990



4.3 Medidas de Bondad de ajuste:

En este caso se utilizarán R^2 y DMC como se señala en 3.4. Para ello es necesario conocer los valores observados y los modelados para cada caso.

Crecida 1: (25 - 26 de Julio de 1990):

tiempo (hrs.)	Modelado (m3/seg.)	Observado (m3/seg.)
14	5.70	5.70
15	5.62	5.50
16	5.53	5.40
17	5.45	5.30
18	5.37	5.20
19	5.28	5.10
20	5.21	5.00
21	5.13	4.95
22	5.06	4.90
23	4.98	4.90
24	4.91	4.90

$R^2 = 0.9371$

DMC = 0.1426

Crecida 2: (6 - 7 - 8 de Agosto de 1990):

tiempo (hrs.)	Modelado (m3/seg)	Observado (m3/seg.)
6	8.80	8.80
7	8.71	8.75
8	8.63	8.70
9	8.54	8.50
10	8.46	8.30
11	8.38	8.30
12	8.30	8.30

$R^2 = 0.9099$

DMC = 0.0757



La modelación matemática de caudales recesivos, permite la cuantificación del recurso hídrico almacenado en el suelo.

5.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1.- El modelo planteado para la estimación de caudales recesivos, a la luz de los resultados obtenidos en el ejemplo práctico que se incorpora a este documento, demuestra poseer buena capacidad de modelación.

5.2.- Es importante destacar, que los niveles de bondad de ajuste obtenidos para el ejemplo planteado, son los que normalmente entrega el modelo matemático en cuestión, ya que similares experiencias realizadas por los autores, en otros puntos de control hidrológico en la VII Región de Chile, así lo han demostrado.

5.3.- No obstante lo anterior, es fundamental realizar estudios de mayor continuidad y profundidad, en distintas secciones de control hidrológico, dado que lo ideal es poseer valores para métricos, asociados a variables de estado de un río, como puede ser el caudal punta o el tiempo base de los hidrogramas. Si esto se lograra, las posibilidades de predecir con mayor antelación y seguridad, aumentarían notablemente.

5.4. - Cabe señalar que producto de la confiabilidad estadística del Modelo matemático, este puede ser perfectamente extrapolable a toda la curva recesiva, independientemente de su duración en el tiempo, ya que ha sido comprobado que el método en comento, derivado de ecuaciones diferenciales, posee consistencia temporal en términos matemáticos y estadísticos.

5.5.- Finalmente, es posible señalar que la utilización de un modelo, como el que se describe en este documento, es función de las necesidades del analista, la experiencia en el tema que éste posea y la capacidad que el modelo presenta de contribuir a un conocimiento mayor del comportamiento hidrológico de una cuenca, y la consiguiente utilización del recurso hídrico, con fines de desarrollo.

6.- BIBLIOGRAFÍA

6.1.- Cirugeda, J. **Redes hidrológicas**. Documento de trabajo. Curso Internacional de Hidrología General y Aplicada. Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, España, 1985, 110 p.

6.2.- Heras, R, s.a., **Recursos hidráulicos. Síntesis, metodología y normas**. Cooperativa de publicaciones del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y puertos, España, 361 p.

603.- Linsley, R. et al, **Hidrología para ingenieros**. Ed. Mc Graw-Hill, Bogotá, Colombia, 1977, 382 p.

6.4.- Pizarra, R. y Novoa, P., **Elementos técnicos de hidrología**. Corporación Nacional Forestal, IV Región, La Serena, Chile, 1986, 57 p.

6.5.- Pizarro. R. et al, **Elementos técnicos de hidrología II**. UNESCO - ROSTLAC, Proyecto Regional Mayor, Corporación Nacional Forestal, IV Región, La Serena, Chile, 1988, 109 p.



La investigación sobre el comportamiento de los recursos es vital, en el objetivo de cuantificar la oferta hídrica.